



Marc Barbut au pays des médianes

Bernard Monjardet

► To cite this version:

| Bernard Monjardet. Marc Barbut au pays des médianes. 2013. halshs-00825005

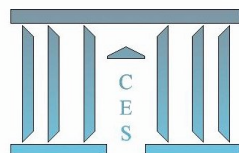
HAL Id: halshs-00825005

<https://shs.hal.science/halshs-00825005>

Submitted on 22 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Marc Barbut au pays des médianes

Bernard MONJARDET

2013.39



MARC BARBUT AU PAYS DES MÉDIANES

Bernard MONJARDET¹

RÉSUMÉ – La notion de médiane apparue d'abord en statistique (notamment sous forme métrique) l'a été ensuite en algèbre et combinatoire. Marc Barbut a été le premier à développer le lien entre ces deux aspects. Je présente ses travaux précurseurs reliant les médianes métriques et les médianes latticielles d'un treillis distributif et utilisant leurs liens dans le cadre d'une « procédure médiane » en analyse des données. Je fais aussi un bref survol du développement de la théorie (plus générale) des « espaces à médianes » et des problèmes posés par la procédure médiane.

MOTS-CLÉS – demi-treillis à médianes, espace métrique, graphe à médianes, procédure médiane, relation majoritaire, treillis distributif.

SUMMARY – Marc Barbut in Medianland

The notion of median originally appeared in Statistics was introduced more later in Algebra and Combinatorics. Marc Barbut was the first to develop the link between these two notions of median. I present his precursory works linking the metric medians and the algebraic medians of a distributive lattice and using these links within the framework of the "median procedure" in data analysis. I also give a short survey on the development of the – more general – theory of "median spaces" and I mention some problems about the median procedure.

KEYWORDS – Distributive lattice, Majority relation, Median graph, Median procedure, Median semilattice, Metric space.

1. INTRODUCTION

La notion de médiane apparaît d'abord en statistique où elle est l'une des classiques caractéristiques de valeur centrale d'une série statistique, celle qui ne prend en compte que l'ordre des éléments de la série. La médiane² peut être définie par une procédure de type majoritaire ou – comme le montre Laplace [1774] – de manière métrique, c'est à dire comme élément minimisant une somme de distances aux éléments de la série. Dans la suite lorsque – pour des cas plus généraux – la médiane sera définie de cette manière, je parlerai de *médiane métrique*. En fait, on peut définir une telle médiane dans n'importe quel espace métrique³ (E, d) : une médiane (métrique)⁴ d'un n -uplet $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de E est un élément x de E minimisant la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} d(x, x_i)$. On notera qu'en général un n -uplet peut avoir plusieurs médianes. La **procédure médiane** – terme utilisé par exemple en analyse des données ou en théorie du choix collectif (voir [Barthélemy et Monjardet, 1981]) – est l'application qui à tout n -uplet d'éléments de l'espace métrique considéré fait correspondre l'ensemble de ses médianes.

¹ Centre d'Études de la Sorbonne (CES), Université ParisI-Panthéon-Sorbonne, Maison des Sciences Économiques (MSE), 106-112 bd de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13, et Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales (CAMS), École des Hautes Études en Sciences Sociales (EHESS), 190 avenue de France 75244 Paris cedex 13, bernard.monjardet@univ-paris1.fr

² Le terme même de médiane n'apparaît que chez Cournot [1843] et – d'après Kendall et Stuart (1977) – c'est seulement en 1883 que Galton parle de "median". Laplace parlait de *milieu de probabilité* [1774]. Sur l'invention du concept de médiane, on peut consulter Lanier et al [2011].

³ Les termes mathématiques non définis et signalés par * le sont dans l'annexe.

⁴ Pour les très nombreuses apparitions de cette notion de médiane métrique, voir Monjardet [1991].

Le terme de médiane apparaît en théorie des treillis* lorsque Sholander [1952, 1954] parle de médianes dans les arbres ou les treillis, puis dénomme *demi-treillis à médianes* ("*median semilattice*") une structure algébrique généralisation des treillis distributifs et des arbres. Lorsque la médiane est définie dans ce contexte, je parlerai de *médiane algébrique*.

Dans les travaux de Sholander et ceux des prédécesseurs qu'il généralise (Jordan [1869], Grau [1947], Birkhoff et Kiss [1947], Avann [1948]) aucun lien n'est fait avec la médiane en statistique. Pourtant lorsqu'on considère la définition métrique de cette médiane, ces liens existent. En fait, leur première apparition (implicite) se trouve dans l'article précédent de Birkhoff et Kiss, puisque dans le cas très particulier de trois éléments d'un treillis distributif, ils montrent que leur médiane algébrique est une médiane métrique. Dans un contexte très différent, ces liens sont utilisés pour la première fois par Guilbaud dans son article de 1952, *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation*. Guilbaud s'y intéresse – entre autres – à la procédure majoritaire proposée par Condorcet pour déterminer une préférence collective à partir d'un ensemble de préférences individuelles exprimées par des ordres totaux*. Dans le cas où tout ordre total est « admissible » (i.e. susceptible de représenter la préférence d'un individu), on sait que cette procédure peut conduire à un « effet Condorcet » (terme dû à Guilbaud) : la relation majoritaire comporte des circuits et la préférence collective n'est donc pas transitive. Mais d'après un résultat de Black [1958], l'effet Condorcet ne peut jamais se manifester si l'ensemble des ordres totaux admissibles satisfait une condition dite d'*unimodalité*. Et Guilbaud en donne la raison : il montre d'abord que la procédure majoritaire peut s'analyser comme la recherche d'une médiane métrique dans l'ensemble des relations binaires, puis que l'ensemble des ordres totaux unimodaux est muni d'une structure de treillis distributif où la médiane métrique devenant une médiane algébrique – généralisation du résultat de Birkhoff et Kiss – est toujours un ordre total. Marc Barbut va développer cette observation dans des textes préluces à de nombreux prolongements. Dans la deuxième section de ce texte, je décrirai ses contributions. Dans la troisième, je ferai un bref survol des développements de la théorie et des applications des *espaces à médianes* ("*median spaces*"). La conclusion me permettra de soulever quelques problèmes et voies de recherche.

N.B. Dans ce texte, les ensembles considérés sont finis.

2. MÉDIANES ET TREILLIS DISTRIBUTIFS

La théorie des treillis* initiée par Dedekind et Schröder à la fin du XIX^e siècle est redécouverte et développée dans les années mille neuf cent trente par de nombreux mathématiciens, dont particulièrement Garrett Birkhoff.

Les premiers résultats qui vont amener à considérer une notion de médiane dans les treillis partent de l'observation suivante : étant donné trois éléments quelconques x, y, z d'un treillis T , on a toujours l'inégalité :

$$m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = m^+(x, y, z)$$

Les deux éléments $m(x, y, z)$ et $m^+(x, y, z)$ définissent donc un intervalle* $[m(x, y, z), m^+(x, y, z)]$ du treillis.

Il est connu depuis au moins Menger [1936] (voir pp. 479-480) qu'un treillis est distributif* si et seulement si l'inégalité précédente devient une égalité, i.e. si pour tout triplet (x, y, z) on a :

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \quad (M)$$

Cet élément $m(x,y,z)$ est alors appelé la *médiane (algébrique)*⁵ du triplet. On peut justifier ce terme – qui dans ce contexte ne semble avoir été utilisé pour la première fois que par Sholander dans son article de 1952 – en remarquant que dans le cas (très particulier) où le treillis se réduit à un ordre total $x < y < z$ ⁶, l'élément donné par (M) est l'élément y .

D'autre part, on peut toujours définir une distance* sur un treillis T en utilisant la distance δ de la différence symétrique : soient t, t' deux éléments de T , S_t (respectivement, $S_{t'}$) l'ensemble des sup-irréductibles* inférieurs ou égaux à t (respectivement, à t') ; on pose :

$$\delta(t, t') = |S_t \Delta S_{t'}| = |\{s \in S : [s \in S_t \text{ et } s \notin S_{t'}] \text{ ou } [s \notin S_t \text{ et } s \in S_{t'}]\}|.$$

Et on peut donc utiliser cette distance pour définir une médiane métrique d'un n -uplet $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de T , comme un élément m de T minimisant la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} \delta(t, x_i)$.

Birkhoff montre dans un article avec Kiss [1947] que si T est un treillis distributif, l'élément $m(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ est l'unique élément du treillis minimisant la somme des distances $\delta(t, x) + \delta(t, y) + \delta(t, z)$. En d'autres termes et comme déjà mentionné dans l'introduction, cela revient à montrer que dans l'espace métrique (T, δ) un triplet (x,y,z) d'éléments a une unique médiane métrique qui est une médiane algébrique.

Marc Barbut dans son texte *Médianes, distributivité, éloignements* (1961) rappelle ces résultats (en renvoyant au livre de Birkhoff *Lattice Theory*) et en donne des généralisations conséquentes.

Il généralise d'abord la caractérisation des treillis distributifs par l'identité (M). Remarquant que pour tout n -uplet $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'un treillis T , on a (avec $N = \{1, 2, \dots, n\}$) l'inégalité :

$$m(\underline{x}) = \bigvee_{S \subseteq N, |S| > n/2} (\bigwedge_{i \in S} x_i) \leq \bigwedge_{S \subseteq N, |S| > n/2} (\bigvee_{i \in S} x_i) = m^+(\underline{x}),$$

il appelle *intervalle médian* du n -uplet l'intervalle correspondant

$$[m(\underline{x}), m^+(\underline{x})] = \{x \in T : m(\underline{x}) \leq x \leq m^+(\underline{x})\}$$

Barbut caractérise alors les treillis distributifs par l'existence d'un entier n impair et supérieur ou égal à 3 tel que pour tout n -uplet l'intervalle médian se réduit à un élément. Cet élément :

$$m(\underline{x}) = \bigvee_{S \subseteq N, |S| > n/2} (\bigwedge_{i \in S} x_i)$$

est la *médiane algébrique* de ce n -uplet. Barbut montre que *cette médiane algébrique est l'unique médiane métrique du n -uplet (n impair)*, i.e. que c'est l'unique élément du treillis minimisant la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} \delta(t, x_i)$ des distances (de la différence symétrique) de cet élément aux éléments du n -uplet.

Le résultat de Barbut – comme celui de Birkhoff et Kiss – est en fait un peu plus général. Il est vrai pour toute distance d défini sur le treillis distributif par $d(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$ où v est une valuation* strictement isotone* du treillis.

5 C'est moi qui rajoute algébrique.

6 Dans ce cas, l'opération \vee (respectivement \wedge) est le maximum (respectivement, le minimum) des deux éléments.

La technique de preuve que Barbut utilise ici comme dans d'autres textes consiste à se ramener au cas où les éléments du n -uplet forment une chaîne*. Pour cela, il associe à un n -uplet $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'un treillis quelconque deux chaînes obtenues en prenant pour $k = 1, 2, \dots, n$ les éléments définis par :

$$b_k = \bigvee_{S \subseteq N, |S|=k} (\bigwedge_{i \in S} x_i) \quad \text{et} \quad a_k = \bigwedge_{S \subseteq N, |S|=k} (\bigvee_{i \in S} x_i),$$

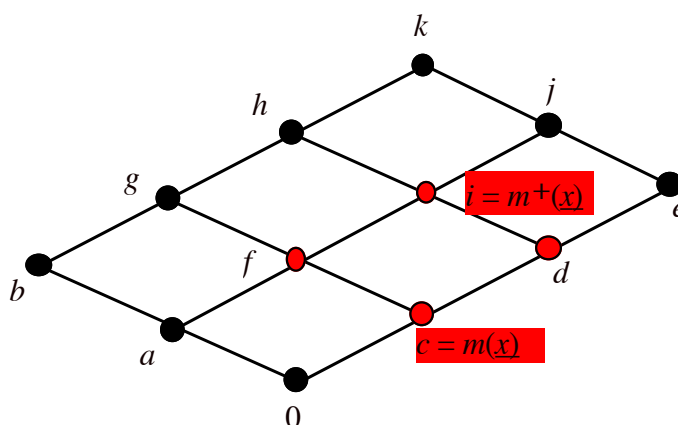
On a en effet $a_k \leq a_{k+1}$ et $b_k \geq b_{k+1}$. Dans un treillis distributif, Barbut montre l'égalité $a_k = b_{n-k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) et donc l'égalité de ces deux chaînes. Il montre ensuite que la somme des distances d'un élément du treillis aux éléments du n -uplet est égale à la somme des distances de cet élément aux éléments de cette unique chaîne. Ceci lui permet donc de se ramener au cas où le n -uplet \underline{x} est une chaîne $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Il est intéressant de remarquer que dans un treillis distributif l'égalité $a_k = b_{n-k+1}$ permet de donner une autre expression de l'intervalle médian $[m(\underline{x}), m^+(\underline{x})]$ d'un n -uplet \underline{x} . On peut d'abord remarquer que dans un treillis quelconque $m(\underline{x}) = b_{\lceil (n+1)/2 \rceil}$ et $m^+(\underline{x}) = a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Appliquant alors dans un treillis distributif l'égalité $a_k = b_{n-k+1}$ à $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ on obtient $a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} = b_{\lceil (n+1)/2 \rceil}$, et l'intervalle médian d'un n -uplet \underline{x} s'écrit donc :

$$[m(\underline{x}), m^+(\underline{x})] = [\bigvee_{S \subseteq N, |S| > n/2} (\bigwedge_{i \in S} x_i), \bigvee_{S \subseteq N, |S| \geq n/2} (\bigwedge_{i \in S} x_i)].$$

La Figure 1 donne un exemple d'un tel intervalle médian dans un treillis distributif (obtenu comme produit direct de deux ordres totaux).

Les résultats précédents de théorie des treillis se situent dans un contexte de mathématiques « pures ». Mais la motivation de Barbut est de les utiliser dans le contexte « appliqué » de l'agrégation des préférences (ou – plus généralement – de l'analyse des données), ce qu'il fait dans son texte de 1966 « Médianes, Condorcet et Kendall ». Il y considère le cas de « votants » exprimant leurs préférences sur des « candidats »⁷ au moyen de relations R d'ordres totaux⁸ : xRy s'interprète comme le votant préfère le candidat x au candidat y . Le lien entre les médianes et la procédure de Condorcet est déjà apparu dans l'introduction. Quand à la mention de Kendall, elle provient de ce que le *tau de Kendall* entre deux ordres totaux n'est autre qu'une normalisation de leur distance de la différence symétrique.



⁷ Je trouve commode de parler ici de votants et de candidats, mais – comme le mentionne Barbut – le cas du vote d'une assemblée n'est qu'une des situations possibles, une autre étant, par exemple, celle où différentes décisions sont ordonnées selon plusieurs critères.

⁸ En fait, Barbut examine le cas où les préférences sont des préordres totaux, i.e. des relations transitives et totales. Je me restreins ici au cas des ordres totaux pour ne pas alourdir l'exposé.

FIGURE 1. Intervalle médian $[m(\underline{x}), m^+(\underline{x})] = [c, i]$ du 4-uplet $\underline{x} = (b, f, d, e)$
d'un treillis distributif

$$\begin{aligned} m(\underline{x}) &= (b \wedge f \wedge d) \vee (b \wedge f \wedge e) \vee (b \wedge d \wedge e) \vee (f \wedge d \wedge e) = c ; \\ m^+(\underline{x}) &= (b \wedge f) \vee (b \wedge d) \vee (b \wedge e) \vee (f \wedge d) \vee (f \wedge e) \vee (d \wedge e) = i \end{aligned}$$

$X = \{x, y, z, \dots\}$ étant l'ensemble des candidats et $N = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des n votants, leurs préférences à agréger en une préférence collective constituent un n -uplet – dit aussi dans ce contexte *profil* – $\underline{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ où les R_i sont des ordres totaux définis sur X . La *relation de Condorcet* de ce profil est la *relation majoritaire stricte* définie par :

$$C(\underline{R}) = \cup \{(x, y) \in X^2 : |\{i \in N : xR_i y\}| > n/2\},$$

i.e. x est préféré à y par une majorité (stricte) des votants.

Barbut note que cette relation de Condorcet peut s'écrire :

$$C(\underline{R}) = \cup_{S \subseteq N, |S| > n/2} \{ \cap_{i \in S} \{R_i\} \}.$$

C'est donc la médiane algébrique $m(\underline{R})$ du n -uplet \underline{R} calculée dans le treillis de toutes les relations binaires définies sur X .

Ce treillis distributif est un espace métrique pour la distance de la différence symétrique entre deux relations :

$$\delta(R, R') = |R \Delta R'| = |\{(x, y) \in X^2 : [xRy \text{ et } xR'^c y] \text{ ou } [xR'^c y \text{ et } xRy]\}|$$

Dès lors, on peut utiliser le résultat montré précédemment pour un treillis distributif quelconque et la distance de la différence symétrique : la relation de Condorcet $C(\underline{R})$ d'un n -uplet d'ordres totaux minimise la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} \delta(R, R_i)$ des distances (de la différence symétrique) d'une relation R aux ordres du profil \underline{R} , autrement dit c'est une médiane métrique de ce profil.

En fait, la preuve de Barbut lui permet de montrer que les médianes métriques du n -uplet \underline{R} sont toutes les relations situées dans l'intervalle médian du profil \underline{R} , soit puisqu'on est dans un treillis distributif, dans l'intervalle :

$$[m(\underline{R}), m^+(\underline{R})] = [\cup_{S \subseteq N, |S| > n/2} \{ \cap_{i \in S} \{R_i\} \}, \cup_{S \subseteq N, |S| \geq n/2} \{ \cap_{i \in S} \{R_i\} \}].$$

La borne supérieure de cet intervalle s'écrit aussi :

$$m^+(\underline{R}) = \cup \{(x, y) \in X^2 : |\{i \in N : xR_i y\}| \geq n/2\},$$

et s'appelle la *relation majoritaire* associée au profil.

Finalement, les médianes métriques d'un profil sont toutes les relations contenues entre les deux relations majoritaires (stricte et non stricte) associées au profil. Elles s'obtiennent donc en ajoutant à toutes les préférences majoritaires strictes un ensemble arbitraire de préférences pour lesquelles deux candidats étaient *ex-aequo* (il y a donc une seule médiane si le nombre de votants est impair).

Ces médianes métriques du profil \underline{R} d'ordres totaux sont définies dans l'espace métrique (pour la distance δ de la différence symétrique) de toutes les relations binaires et ne sont pas généralement des ordres totaux. Toutefois, dès qu'il n'y a pas d'effet Condorcet, i.e. dès que la relation de Condorcet $C(\underline{R})$ est sans circuit, l'intervalle médian du profil \underline{R} , contient des ordres totaux qui sont tous les *ordres médians* de \underline{R} , i.e. tous les ordres totaux minimisant la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} \delta(R, R_i)$ avec R ordre total.

REMARQUES

1) Dans le cas où il y a effet Condorcet, l'intervalle médian du profil R d'ordres totaux ne contient aucun ordre total. Si l'on veut obtenir des médianes métriques qui soient des ordres totaux, il faut minimiser la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} \delta(R, R_i)$ dans l'espace métrique (pour δ) des ordres totaux. Ce problème d'optimisation combinatoire est connu comme étant très difficile (« NP-difficile »). On peut aussi partir de la relation de Condorcet $C(R)$ du profil et rechercher un ordre total R à distance minimum de cette relation, i.e. minimisant $\delta(R, C(R))$. Ce problème est aussi « NP-difficile » (voir, par exemple, [Hudry, 2012]). Il est à remarquer que dans sa Note de 1966, Barbut s'intéresse à un problème légèrement plus général : chercher un ordre total à distance minimum d'une relation binaire quelconque ; il montre que ce problème se ramène à la recherche d'un recouvrement minimum, l'un des premiers problèmes montré NP-difficile⁹.

2) Comme le signale Barbut au début de son texte les résultats qu'il obtient pour des ordres (ou préordres) totaux sont en fait des propriétés du treillis des parties d'un ensemble muni de la distance de la différence symétrique. Plus généralement, ils sont vrais pour tout treillis distributif muni d'une distance définie par une valuation strictement isotone (voir [Monjardet, 1980]) : les médianes (métriques) d'un n -uplet y sont tous les éléments de l'intervalle médian $[m(x), m^+(x)]$ ¹⁰. Dans l'exemple de la Figure 1, l'intervalle médian contient 4 médianes et on peut vérifier que la somme des distances d'une médiane aux éléments du 4-uplet est minimum et égale à 7, la distance utilisée étant celle définie plus haut de la différence symétrique δ ¹¹.

Toujours motivé par des considérations appliquées, en l'occurrence le problème posé en analyse des questionnaires de recherche d'une échelle de Guttman proche des réponses observées, Barbut va considérer dans un treillis distributif un problème généralisant celui de la recherche d'un élément à distance minimum d'un n -uplet d'éléments de ce treillis : la détermination d'une chaîne maximale* à distance minimum du n -uplet. Dans son texte de 1967, il donne un algorithme de détermination qui s'appuie sur une généralisation du résultat obtenu pour déterminer l'élément à distance minimum : la somme des distances des éléments d'une chaîne du treillis aux éléments du n -uplet est égale à la somme des distances de ces éléments aux éléments de la chaîne associée au n -uplet.

Avant de passer à des généralisations des structures et résultats précédents, on peut mentionner que certains sont présentés dans l'ouvrage *Ordre et classification* (voir [Barbut et Monjardet, 1970]), celui ci contenant aussi dans son dernier chapitre d'autres propriétés de la médiane dans le cas d'un treillis distributif produit direct d'ordres totaux.

3.1. ESPACES À MÉDIANES ET PROCÉDURE MÉDIANE

Dans l'article de Birkoff et Kiss évoqué précédemment, il était montré que l'opération ternaire de médiane définie dans un treillis distributif par $(x, y, z) \rightarrow m(x, y, z)$ vérifiait certaines propriétés et qu'inversement un ensemble muni d'une opération ternaire vérifiant ces propriétés était un treillis distributif. Les travaux ultérieurs de Sholander

⁹ Évidemment, cette remarque ne constitue pas une preuve que le problème d'ordre total à distance minimum d'une relation binaire quelconque est NP-difficile.

¹⁰ Le lecteur attentif aura remarqué que l'écriture de l'intervalle médian donnée à la page 89 de ce texte de 1980 est clairement erronée.

¹¹ Dans un treillis distributif, cette distance δ est égale à la longueur d'un plus court chemin dans le graphe de voisinage* du treillis ; par exemple Figure 1, $\delta(c, b) = 3$.

[1952, 1954 (a et b)] et Avann [1948, 1961], puis plus tard de Nebesky [1971] et de Mulder et Schrijver [1979] ont conduit à définir une structure plus générale d'*espace à médianes*¹², qui revêt différentes formes algébrique, combinatoire et latticielle.

Une *algèbre à médianes* (*median algebra*) est un ensemble muni d'une opération ternaire $(x,y,z) \rightarrow (xyz)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $(xxy) = x$
- $(xyz) = (yxz) = (yzx)$
- $((xyz)tu) = (x(ytu)(ztu))$.

Un *graphe à médianes* (*median graph*) est un graphe non orienté connexe tel que tout triplet x,y,z de sommets admet une médiane (métrique) unique, i.e. un unique sommet $m(x,y,z)$ minimisant $d(x, t) + d(y, t) + d(z, t)$, où d est la distance géodésique (le nombre minimum d'arêtes d'un chemin) entre deux sommets.

Un exemple – très particulier – de tel graphe est fourni par un *arbre*, i.e. un graphe non orienté connexe et sans cycles. Un autre exemple est le graphe de voisinage* d'un treillis distributif.

Un *demi-treillis à médianes* (*median semilattice*) est un inf-demi-treillis* D vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $x \in D$ l'ensemble des éléments inférieurs ou égaux à x est un treillis distributif,
- $xvyvz$ existe pour tous $x,y,z \in D$ tels que les trois éléments xvy , yvz et zvx existent.

En particulier, un treillis distributif est un demi-treillis à médianes.

Un *hypergraphe à médianes*¹³ est un hypergraphe $H = (X, \mathcal{H})$, i.e. une famille \mathcal{H} de parties de X , vérifiant les trois propriétés suivantes :

complémentation : $\forall E \in \mathcal{H}, X \setminus E \in \mathcal{H}$,

¹² J'utilise le terme « espace à médianes » pour désigner l'une quelconque de ces structures équivalentes. En anglais, le terme "*median space*" peut avoir ce même sens ou désigner une structure plus générale.

¹³ Ce nom – que j'introduis – semble approprié compte tenu de l'équivalence de cette structure avec les précédentes. En anglais, on trouve les termes "*maximal complemented Helly hypergraph*" ou "*separating Helly copair hypergraph*".

- Helly : $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}, [G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \ \forall G_1, G_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow \cap \{G \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset]$,
- maximal pour ces deux propriétés.

À partir de l'une quelconque de ces structures on peut obtenir chacune des autres. Ainsi, à partir d'une algèbre à médianes définie par son opération ternaire (...), on définit un graphe à médianes en reliant deux éléments différents x et y par une arête s'il n'existe pas de troisième élément z tel que $z = (xyz)$. Inversement l'opération ternaire d'un graphe à médianes définie par $(x, y, z) \rightarrow m(x, y, z)$ définit une algèbre à médianes. De même, l'opération ternaire de médiane d'un demi-treillis à médianes définit une algèbre à médianes, tandis que son graphe de voisinage est un graphe à médianes. Et inversement, on peut ordonner une algèbre à médianes ou un graphe à médianes de façon à en faire des demi-treillis à médianes. Le passage entre ces trois structures et celle d'hypergraphe à médianes repose sur le fait qu'on peut y définir des bipartitions de leurs éléments, dont les classes constituent un tel hypergraphe. Par exemple, dans le cas d'un treillis distributif, ces bipartitions sont celles obtenues en considérant l'ensemble des éléments supérieurs ou égaux (respectivement, non supérieurs ou égaux) à un sup-irréductible. Ainsi pour le treillis distributif de La Figure 1, on obtient 5 telles bipartitions, par exemple à partir du sup-irréductible d , la bipartition $\{d, i, h, e, j, k\}, \{c, f, g, 0, a, b\}$.

D'autre part, on a un résultat de plongement [Sholander, 1954(b)] montrant que tout demi-treillis à médianes peut être plongé dans un treillis distributif, avec conservation des distances (et donc des médianes).

Ces résultats qui constituent la base de la théorie des espaces à médianes ont été enrichis par de très nombreux travaux. On peut par exemple obtenir d'autres caractérisations des structures précédentes, trouver d'autres structures équivalentes ou en étudier des sous classes telle celle des "*square graphs*" (voir [Bandelt *et al.*, 2010]) ou des généralisations tels les "*partial cubes*", i.e. les sous-graphes isométriques des hypercubes (voir [Ovchinnikov, 2011]). On pourra avoir une idée de l'ampleur de ces développements en consultant les synthèses de Mulder [1980], Bandelt et Hedlikova [1983] ou Bandelt et Chepoi [2009], ainsi que l'excellente notice de Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Median_graph].

Une direction de recherche plus appliquée et directement issue des travaux de Barbut concerne l'étude de la procédure médiane dans les graphes ou demi-treillis à médianes. Rappelons que cette procédure fait correspondre à tout n -uplet d'éléments d'une telle structure l'ensemble de leurs médianes (métriques). Ainsi Bandelt et Barthélemy [1984] généralisent les propriétés obtenues par Barbut pour les médianes dans le cas d'un treillis distributif au cas des graphes à médianes (et donc aussi des demi-treillis à médianes). Plus tardivement, un résultat significatif est la caractérisation de la procédure médiane dans les demi-treillis à médianes par trois propriétés (voir [Barthélemy et Janowitz, 1991 ; McMorris *et al.*, 2000]). On pourra trouver l'expression précise de tels résultats dans les exposés suivants (voir [Day et McMorris, 2003 ; Hudry *et al.*, 2006, 2009 ; Caspard *et al.*, 2007, 2012]).

D'autres travaux étudient les propriétés de la procédure médiane dans des treillis ou demi-treillis plus généraux et pour différents types de distances latticielles. Dans ces cas, les médianes (métriques) d'un n -uplet ne constituent plus (généralement) un intervalle, mais on peut en chercher des bornes inférieures ou supérieures. Un cas extrême consiste à se demander si les médianes m d'un n -uplet $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfont l'inégalité $\wedge_{i \in N} x_i \leq m$, ce qui correspond à la propriété parétienne de respect de

l'unanimité¹⁴. Ainsi, Leclerc [1990, 1993] peut caractériser certaines classes de treillis par des propriétés de borne inférieure de la procédure médiane ou montrer que pour certaines distances et certains treillis cette procédure ne respecte pas la propriété parétienne (voir aussi section 7.3 dans [Caspard *et al.*, 2007, 2012] et la section 7 dans [Hudry et Monjardet, 2010]).

Lorsqu'on considère la procédure médiane dans des espaces métriques quelconques, l'un des problèmes rencontrés est celui du calcul des médianes. On a souvent pu montrer que ce calcul est NP-difficile ; c'est par exemple le cas de l'espace métrique formé de tous les ordres totaux muni de la distance de la différence symétrique. Dans les espaces à médianes considérés dans cette section, les médianes peuvent s'obtenir au moyen d'expressions algébriques ce qui permet généralement un calcul facile¹⁵. En ce sens, on peut dire que ces structures sont de bons espaces pour l'utilisation de la procédure médiane. En revenant au cas de l'agrégation des préférences, Guilbaud avait été le premier à montrer que la structure d'espace à médianes – en l'occurrence de treillis distributif – du domaine des préférences était la bonne pour pouvoir utiliser la règle majoritaire. Plus généralement, Nehring et Puppe [2007, 2010] montrent que la structure d'espace à médianes de tels domaines permet d'y obtenir des résultats de possibilité pour une vaste classe de règles d'agrégation.

Indépendamment de la procédure médiane, les espaces à médianes sont aussi apparus dans d'autres contextes de mathématiques « motivées ». Ainsi les travaux de Nebesky [1969, 1971] sur les graphes à médianes ont pour origine des problèmes de linguistique, tandis qu'en phylogénie la recherche d'arbres évolutionnaires d'espèces à partir de caractéristiques binaires conduit à des « *X*-graphes à médianes » généralisant les « *X*-arbres de Buneman » (voir, notamment, [Barthélemy, 1989]).

4. CONCLUSION

Lorsqu'on doit résumer (ou agréger) des objets de nature variée, définir une distance entre ces objets et chercher un objet « à distance minimum » des objets donnés – donc recourir à une procédure médiane¹⁶ – est une idée très naturelle. En fait, on peut penser (voir [Guilbaud, 1952 ; Young, 1988 ; Monjardet, 2006, section 3.2.2]) que c'était l'idée de Condorcet quand il cherchait les moyens de pallier la non transitivité possible de la préférence collective obtenue par sa méthode majoritaire. Plus tard, Fréchet [1949] la propose (sous de multiples formes) pour résoudre le problème de Quetelet de définition d'un « homme moyen ». En théorie du choix collectif, pour agréger des préordres totaux, elle est connue sous le nom de méthode de Kemeny [1959]. Mais il est intéressant de remarquer qu'elle a été proposée à la même époque, sous des formes différentes par deux autres auteurs [Brunk, 1960, et Hays, 1960]). En analyse des données, c'est Régnier [1965] et Mirkin [1974] qui l'introduisent pour la première fois

¹⁴ Lorsque le n -uplet est un profil $\underline{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ de relations binaires, une relation médiane M de ce profil conserve l'unanimité si elle contient tous les couples apparaissant dans toutes ces relations, i.e. si $\bigcap_{i \in N} \{R_i\} \subseteq M$.

¹⁵ En fait, dans le cas d'un demi-treillis à médianes (auquel on peut toujours se ramener) ces expressions peuvent s'exprimer au moyen des sup-irréductibles inférieurs ou égaux à un élément et du supremum dans ce demi-treillis. Il faut donc pouvoir calculer facilement ces sup-irréductibles et ce supremum.

¹⁶ Je réserve le nom de procédure médiane au cas où l'*éloignement* entre l'objet consensus et les objets donnés est calculé comme une somme de distances. Mais il y a autant de telles procédures que de choix possibles de distances entre deux objets.

pour la recherche d'un consensus entre différentes classifications (en fait, différentes partitions).

L'apparente évidence de cette procédure médiane ne doit pas cacher qu'elle pose en fait de nombreux problèmes, dont nous listons certains ci-dessous.

- PROBLÈMES ALGORITHMIQUES

J'ai mentionné que généralement la recherche des consensus médians conduit à des problèmes NP-difficiles, ce qui a mené à de nombreuses recherches autour d'algorithmes ou d'heuristiques de résolution exacte ou approchée (voir, par exemple, [Ali et Meila, 2012 ; Hudry, 2012] pour le cas d'ordres médians). Par contre, si l'espace métrique des objets à agréger constitue un espace à médianes, le calcul des médianes devient facile, à certaines conditions (voir note 15). Il serait nécessaire de préciser les espaces à médianes ou/et les profils à agréger pour lesquels ces conditions sont vérifiées.

- PROBLÈMES MÉTHODOLOGIQUES

On a vu que même dans le cas d'espaces à médianes un n -uplet peut avoir plusieurs médianes. Dans ce cas, celles ci sont cependant contenues dans un intervalle – généralement de taille restreinte – et donc assez proches les unes des autres. Il n'en est plus de même dans des espaces métriques quelconques où les médianes d'un profil peuvent être très dispersées. Choisir la médiane qui aura été obtenue – souvent difficilement – comme consensus des objets à agréger présente un risque d'arbitraire. Que faire alors ? On pourrait penser à itérer la procédure en calculant toutes les médianes puis les médianes de cet ensemble de médianes, etc. Mais d'une part, il faudrait pouvoir les calculer toutes et d'autre part rien ne dit que l'itération conduira à une médiane finale unique. Par exemple, pour prendre un cas extrême, on obtient comme ordres médians d'un profil formé de 2 ordres totaux opposés (sur un ensemble fixé) un profil formé de tous les ordres totaux (sur cet ensemble), profil qui a lui même pour médianes tous ces ordres.

- PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Les interrogations méthodologiques précédentes amènent à se poser des problèmes mathématiques : en dehors des espaces à médianes, peut on caractériser dans certaines structures des n -uplets de leurs éléments dont les médianes seraient suffisamment proches les unes des autres, voire uniques ? Ces n -uplets peuvent-ils être caractérisés à partir de propriétés d'*homogénéité*, celle ci étant par exemple définie comme une moyenne des distances entre leurs éléments ? Dans le cas d'ordres totaux, il existe deux coefficients d'homogénéité classiques associés respectivement aux distances de la différence symétrique (le K de Kendall) et des rangs (le W de Spearman)¹⁷. Mais on peut remarquer, en prenant un profil formé de tous les ordres totaux sauf un, que l'hétérogénéité d'un profil n'exclut pas l'existence d'un ordre médian unique. De manière générale peut-on évaluer la proportion des n -uplets admettant une médiane unique ?

D'autres problèmes proviennent de la recherche – engendrée par le théorème d'Arrow – de caractérisations axiomatiques de procédures d'agrégation¹⁸. On a déjà

¹⁷ Pour des précisions sur ces coefficients, voir par exemple Monjardet [1985].

¹⁸ Dans le cas de l'agrégation d'ordres totaux, le théorème d'Arrow est une caractérisation des projections (les fonctions dites « dictatoriales »).

signalé plus haut qu'on avait pu caractériser la procédure médiane dans les graphes ou demi-treillis à médianes. Cette caractérisation utilise notamment une propriété dite de *renforcement*¹⁹ (ou de *consistency*) utilisée dans une remarquable caractérisation de la procédure médiane pour les ordres totaux obtenue par Young et Levenglick [1978]. Ces auteurs obtiennent leur résultat par des méthodes analytiques et la recherche d'une preuve purement algébrique-combinatoire reste un défi à relever²⁰. D'autre part, la procédure médiane n'est pas en général caractérisée pour d'autres structures, par exemple pour l'agrégation de partitions.

Une liste de problèmes concernant la procédure médiane apparaissait déjà dans Barthélemy et Monjardet [1981]. La liste présentée ici en reprend certains non résolus et ajoute des problèmes nouveaux, en particulier les problèmes méthodologiques qui peuvent amener à se poser la question du bien fondé de l'utilisation de cette procédure. Quoi qu'il en soit, on ne peut que souhaiter que, continuant dans l'esprit des belles recherches de Marc Barbut et de ses continuateurs, d'autres reprennent le flambeau en y répondant.

Remerciements. Je remercie Bruno Leclerc pour ses remarques sur une première version de ce texte et je profite des dernières collaborations de Christiane Boghossian et Catherine Guéraud à un numéro de cette revue pour les remercier chaleureusement de leur travail sur ce texte (et bien d'autres).

BIBLIOGRAPHIE

- ALI A., MEILA M. (2012), "Experiments with Kemeny ranking: What works when?", *Mathematical Social Sciences* 64(1), pp. 28-40.
- AVANN S.P. (1948), "Ternary distributive semi-lattices", *Bulletin American Mathematical Society* 54, pp. 79.
- AVANN S.P. (1961), "Metric ternary distributive semi-lattices", *Proceedings of the American Mathematical Society* 12, pp. 407-414.
- BANDELT H.H., BARTHÉLEMY J.-P. (1984), "Medians in median graphs", *Discrete Applied Mathematics* 8, pp. 131-142.
- BANDELT H.H., CHEPOI V. (2008), "Metric graph theory and geometry: a survey, Surveys on Discrete and Computational Geometry: Twenty Years Later", J.E. Goodman, J. Pach et R. Pollack (eds), *Contemporary Mathematics* 453, pp. 49-86.
- BANDELT H.H., CHEPOI V., EPPSTEIN D. (2010), "Combinatorics and geometry of finite and infinite square graphs", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 24, pp. 1399-1440.
- BANDELT H.H., HEDLIKOVA J. (1983), "Median algebras", *Discrete Mathematics* 45, pp. 1-30.
- BARBUT M. (1961), « Médianes, distributivité, éloignements » *Publications du Centre de mathématique sociale*, Paris, et *Mathématiques et Sciences humaines* 70, 1980, p. 5-31.
- BARBUT M. (1966), « Médianes, Condorcet et Kendall », *Note SEMA*, Paris, et *Mathématiques et Sciences humaines* 69, 1980, p. 5-13.
- BARBUT M. (1966), « Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée (cas fini-distance de la différence symétrique) » *Mathématiques et Sciences humaines* 17, p. 47-48.
- BARBUT M. (1967), « Échelles à distance minimum d'une partie donnée d'un treillis distributif fini » *Mathématiques et Sciences humaines* 18, p. 41-46.

¹⁹ Elle dit que si deux n -uplets x et y ont des médianes en commun, alors l'ensemble de ces médianes communes est l'ensemble des médianes du $2n$ -uplet xy obtenu par concaténation des deux n -uplets.

²⁰ L'ensemble de tous les ordres ayant une structure de demi-treillis inférieurement distributif dont les éléments maximaux sont les ordres totaux, une approche possible nécessiterait de généraliser des résultats sur la caractérisation de la procédure médiane dans de tels demi-treillis (voir la section 5.3.2 et le problème ouvert 5.46 dans la monographie de Day et Mc Morris [2003]).

- BARBUT M., MONJARDET B. (1970), *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, tomes I et II, Paris, Hachette.
- BARTHÉLEMY J.-P. (1989), "From copair hypergraphs to median graphs with latent vertices", *Discrete Mathematics* 76(1), pp. 9-28.
- BARTHÉLEMY J.-P., JANOWITZ M.F. (1991), "A formal theory of consensus", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 4, pp. 305-322.
- BARTHÉLEMY J.-P., MONJARDET B. (1981), "The Median Procedure in Cluster Analysis and Social Choice Theory", *Mathematical Social Science* 1, pp. 235-268.
- BARTHÉLEMY J.-P., LECLERC B., MONJARDET B. (1986), "On the uses of ordered sets in problems of comparison and consensus of classifications", *Journal of Classification* 3, pp. 187-224.
- BIRKHOFF G. (1940), *Lattice Theory* (1^{er} éd.), Providence (RI), American Mathematical Society.
- BIRKHOFF G., KISS S.A. (1947), "A ternary operation in distributive lattices", *Bulletin of the American Mathematical Society* 53, pp. 749-752.
- BLACK D. (1958), *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BRUNK H.O. (1960), "Mathematical models for ranking from paired comparisons", *Journal of the American Statistical Association* 55, pp. 503-520.
- CARITAT M.J.A.N. (Marquis de Condorcet) (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, Imprimerie royale.
- CASPARD N., LECLERC B., MONJARDET B. (2007), *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats, usages*, Heidelberg, Springer-Verlag.
- CASPARD N., LECLERC B., MONJARDET B. (2012), *Finite ordered sets: concepts, results and uses*, *Collection Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, 2012.
- DAY W.H.E., Mc MORRIS F.R. (2003), *Axiomatic Consensus Theory in Group Choice and Biomathematics*. SIAM, Philadelphia.
- COURNOT A. (1843), *Exposition de la Théorie des chances et des probabilités*, n° 6, p. 63 et p. 120.
- FRÉCHET M. (1949), *Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen*, Les conférences du Palais de la Découverte, Paris.
- GUILBAUD G.-TH. (1952), « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Economie appliquée* 5(4), p. 501-584 [réimprimé in *Eléments de la théorie des jeux*, Paris, Dunod, 1968 et *Revue Économique*, 2012/4,63]. English translation: "Theories of the general interest and the logical problem of aggregation", *Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics* 4(1), 2008.
- GUILBAUD G.-TH., ROSENSTIEHL P. (1963), « Analyse algébrique d'un scrutin », *Mathématiques et Sciences humaines* 4, p. 9-33.
- HAYS W.L. (1960), "A note on average tau as measure of concordance", *Journal of the American Statistical Association* 55, pp. 331-341.
- HUDRY O. (2012), "On the computation of median linear orders, of median complete preorders and of median weak orders", *Mathematical Social Sciences* 64(1), pp. 2-10.
- HUDRY O., LECLERC B., MONJARDET B., BARTHÉLEMY J.-P. (2006), « Médianes métriques et latticielles », chapitre 6 du volume 3 du traité *Méthodes pour l'aide à la décision*, D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade (éds.), Paris, Hermès, p. 271-312.
- HUDRY O., MONJARDET B. (2010), "Consensus theories: An oriented survey", *Mathematics and Social Sciences* 190, pp. 139-167.
- KEMENY J.G. (1959), "Mathematics without numbers", *Daedalus* 88, pp. 577-591.
- KENDALL M., STUART A. (1977), *The Advanced Theory of Statistics*. T. I. *Distribution Theory* Griffin & C°, Londres, 4th edition, p. 39.
- LANIER D., LEJEUNE J., TROTOUX D. (2011), « L'invention de la médiane », in *Circulation, transmission, héritage*. Actes du XVIII^e colloque inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques. IREM de Basse-Normandie, Caen, p. 387-414.
- LAPLACE (1774), « Mémoire sur la probabilité des causes par les événements » n° 5, *Œuvres complètes*, Tome VIII, p. 141-153.

- LECLERC B. (1990), "Medians and majorities in semimodular lattices", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 3, pp. 266-276.
- LECLERC B. (1993), "Lattice valuations, medians and majorities", *Discrete Mathematics* 111, pp. 345-356.
- LECLERC B. (2003), "The median procedure in the semilattice of orders", *Discrete Applied Mathematics* 127(2), pp. 241-269.
- Mc MORRIS F.R., MULDER H.M., POWERS R.C. (2000), "The median function on median graphs and semilattices", *Discrete Applied Mathematics* 101, pp. 221-230.
- MENGER K. (1936), "New foundations of projective and affine geometries", *Annals of Mathematics* 37, pp. 456-482.
- MIRKIN B.G. (1974), "The problems of approximation in space of relations and qualitative data analysis", *Automatika i Telemekhanika*, translated in *Automation and Remote Control* (Approximation problems in a relation space and the analysis of non numeric methods) 35(9), pp. 1424-1431.
- MONJARDET B. (1980), « Théorie et application de la médiane dans les treillis distributifs finis », *Annals of Discrete Mathematics* 9, p. 87-91.
- MONJARDET B. (1985), « Concordance et consensus d'ordre totaux : les coefficients K et W », *Revue de Statistique Appliquée* 33(2), p. 55-87.
- MONJARDET B. (1991), « Eléments pour une histoire de la médiane métrique », In *Moyenne, Milieu et Centre : Histoires et usages*. Coll. Histoire des Sciences et Techniques, n° 5, éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, p. 45-62.
- MONJARDET B. (2006), "Social choice theory and the Centre de Mathématique Sociale. Some historical notes", *Social choice and Welfare* 25, pp. 433-456.
- MULDER H.M., SCHRIJVER A. (1979), "Median graphs and Helly hypergraphs", *Discrete Mathematics* 25, pp. 41-50.
- MULDER H.M. (1980), *The Interval Function of a Graph*, Mathematical Centre Tracts, 132, Amsterdam, Mathematisch Centrum.
- NEBESKY L. (1969), "Algebraic properties of trees", *Acta Universitatis Carolinae/Philologica*, Monographia 25, Prague, Universita Karlova.
- NEBESKY L. (1971), "Median graphs", *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 12(2), pp. 317-325.
- NEHRING L., PUPPE C. (2007), "Characterization and Possibility Results on Median Spaces", *Journal of Economic Theory* 135(1), pp. 269-305.
- NEHRING L., PUPPE C. (2010), "Abstract Arrowian Aggregation", *Journal of Economic Theory* 145(2), pp. 467-494.
- OVCHINNIKOV S. (2011), *Graphs and Cubes*, Universitext, Springer
- REGNIER S. (1965), « Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique », *ICC Bull.* 4, p. 175-191. Réimprimé in *Mathématiques Informatique et Sciences humaines* 82, 1983, p. 13-29.
- SHOLANDER M. (1952), "Trees, lattices, orders and betweenness", *Proceedings of the American Mathematical Society* 33, pp. 69-381.
- SHOLANDER M. (1954a), "Medians and betweenness", *Proceedings of the American Mathematical Society* 5, pp. 801-807.
- SHOLANDER M. (1954b), "Medians, lattices and trees", *Proceedings of the American Mathematical Society* 5, pp. 808-812.
- VAN DE VEL M. (1993), *Theory of Convex Structures*, Amsterdam, North-Holland.
- YOUNG H.P. (1988), "Condorcet's theory of voting", *American Political Science Review* 82(4), pp. 1231-1244. Réimprimé in *Mathématique, Informatique et Sciences humaines* 111, 1990, p. 43-58.
- YOUNG H.P., LEVENGLICK A. (1978), "A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, pp. 285-300.

ANNEXE (DÉFINITIONS MATHÉMATIQUES)

Une *distance* sur un ensemble X est une fonction réelle d sur $X \times X$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Le couple (X, d) est alors un *espace métrique*.

Une *relation binaire* sur un ensemble X est une partie R de l'ensemble $X \times X$ de tous les couples (x, y) , $x, y \in X$. Si $(x, y) \in R$ (respectivement, $\notin R$) on note xRy (respectivement, $xR^c y$). Une relation binaire R est dite :

<i>réflexive</i> :	si pour tout $x \in X$, xRx
<i>antisymétrique</i> :	si pour tous $x, y \in X$, xRy et $yRx \Rightarrow x = y$
<i>totale</i> :	si pour tous $x, y \in X$, $xR^c y \Rightarrow yRx$
<i>transitive</i> :	si pour tous $x, y, z \in X$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

Une relation binaire réflexive, transitive et totale est un *préordre total*.

Une relation binaire est un *ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Si de plus, elle est totale c'est un *ordre total*. Un ensemble muni d'un relation d'ordre (respectivement, d'ordre total) est un *ensemble ordonné* (respectivement, *totalement ordonné*). Ci-dessous, nous notons \leq la relation d'ordre d'un ensemble ordonné (arbitraire) et $<$ la relation d'ordre strict associée.

Soit $x < y$ deux éléments d'un ensemble ordonné. L'*intervalle* $[x, y]$ est l'ensemble des z tels que $x < z < y$. L'élément y *couvre* l'élément x , si $[x, y] = \{x, y\}$. Le *graphe de voisinage* d'un ensemble ordonné est le graphe non orienté où deux éléments sont reliés par une arête si l'un couvre l'autre.

Une *chaîne* d'un ensemble ordonné est une suite $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ d'éléments de cet ensemble.

Un *minorant* (respectivement, *majorant*) de deux éléments.

Un *minorant* (respectivement, *majorant*) de deux éléments x et y d'un ensemble ordonné (X, \leq) est un élément m de X tel que $m \leq x$ et $m \leq y$ (respectivement, $m \geq x$ et $m \geq y$). Si deux éléments x et y de (X, \leq) ont un plus grand minorant (respectivement, un plus petit majorant) commun, on l'appelle l'*infimum* ou la *borne inférieure* (respectivement, le *supremum* ou la *borne supérieure*) de x et y et on le note $x \wedge y$ (respectivement, $x \vee y$). Ces définitions s'étendent à une partie quelconque A d'un ensemble ordonné.

Un ensemble ordonné est un *inf-demi-treillis* si tout couple x, y d'éléments admet un infimum $x \wedge y$; c'est un *sup-demi-treillis* si tout couple admet un supremum $x \vee y$; c'est un *treillis* si tout couple admet un infimum et un supremum, donc si c'est à la fois un inf-demi-treillis et un sup-demi-treillis. Dans un treillis (ou demi-treillis) fini, toute partie A admet un infimum et (ou) un supremum, notés respectivement $\wedge A$ et $\vee A$.

Un treillis est *distributif* si chacune de ses deux opérations \vee et \wedge est distributive par rapport à l'autre (par exemple, pour tout x, y, z $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$).

Un *sup-irréductible* d'un treillis est un élément qui n'est pas le supremum d'éléments différents de lui même. De façon équivalente, c'est un élément s qui ne couvre qu'un seul élément s^- : si $x < s$ alors $x \leq s^-$.

Une application v d'un treillis $T \rightarrow R$ est *strictement isotone* si pour tous $x, y \in T$, $x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$. C'est une *valuation* si pour tout $x, y \in T$, $v(x) + v(y) = v(x \vee y) + v(x \wedge y)$. Si v est une valuation strictement isotone, alors $d(x, y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$ est une distance sur T qui est donc un espace métrique.